

The Super Symmetric Representations of S_4 in $GL_3(2)$

Peter M. Maurer
Dept. of Computer Science
Baylor University
Waco, Texas 76798-7356

The following are all representations of S_4 in 3×3 matrices over $GF(2)$. The first set is the conjugates of the super-symmetric H-representation, while the second set is conjugates of the super-symmetric V-representation. A7 is the H-representation, and B6 is the V-representation. The groups were found by enumerating all possible generator pairs of 3×3 matrices: all order 3's and all order 4's. Each pair was closed by generating all products of the pair. If the result was isomorphic to S_4 , then the result along with all of its conjugates was saved. This list was used to determine whether any new pairs were unique. Two unique generator pairs were detected, the generators for A1 and the generators for B1.

To generate the lists of conjugates without the orbits, use the following GF2Matrices code.

```
GroupList3 VC3, HC3;  
VC3.GenerateS4VConj();  
HC3.GenerateS4HConj();  
cout<<"H conjugates\n";  
cout<<HC3.SerializeNL();  
cout<<"V conjugates\n";  
cout<<VC3.SerializeNL();
```

To add the orbits, use the following code.

```
GroupList3 VC3, HC3;  
VC3.GenerateS4VConj();  
HC3.GenerateS4HConj();  
cout<<"H conjugates\n";  
cout<<HC3.SerializeNL();  
for (Group3 * Temp = HC3.GetFirstGroup(); Temp ; Temp=HC3.GetNextGroup())  
{  
    cout<<"-----\n"<<(Temp->GetOrbits()).SerializeNL();  
}  
cout<<"V conjugates\n";  
cout<<VC3.SerializeNL();  
for (Group3 * Temp = VC3.GetFirstGroup(); Temp ; Temp=VC3.GetNextGroup())  
{  
    cout<<"-----\n"<<(Temp->GetOrbits()).SerializeNL();  
}
```

The group labels and notes were added by hand.

A1

001 001 001 001 001 001 001 001 100 100 100 100 100 100 100 100 101 101 101 101 101 101 101 101
010 010 011 011 110 110 111 111 010 010 011 011 110 110 111 111 010 010 011 011 110 110 111 111
100 101 100 101 100 101 100 101 001 101 001 101 001 101 001 101 001 100 001 100 001 100 001 100

A2

010 010 010 010 010 010 011 011 011 011 011 011 100 100 100 100 100 100 101 101 101 101 101 101
011 011 100 100 101 101 010 010 100 100 101 101 010 010 011 011 101 101 010 010 011 011 100 100
110 111 001 111 001 110 110 111 001 110 001 111 001 111 001 110 110 111 001 110 001 111 110 111

Reduction

A3

100 100 100 100 100 100 101 101 101 101 101 101 110 110 110 110 110 110 111 111 111 111 111 111
001 001 010 010 011 011 001 001 010 010 011 011 001 001 010 010 011 011 001 001 010 010 011 011
010 011 001 011 001 010 010 011 001 011 001 010 010 011 001 011 001 010 010 011 001 011 001 010

Reduction

A4

010 010 010 010 010 010 010 010 100 100 100 100 100 100 100 100 110 110 110 110 110 110 110 110
100 100 100 100 110 110 110 110 010 010 010 010 110 110 110 110 010 010 010 010 100 100 100 100
001 011 101 111 001 011 101 111 001 011 101 111 001 011 101 111 001 011 101 111 001 011 101 111

A5

001 001 001 001 001 001 011 011 011 011 011 011 100 100 100 100 100 100 110 110 110 110 110 110
010 010 101 101 111 111 010 010 101 101 111 111 010 010 101 101 111 111 010 010 101 101 111 111
100 110 011 110 011 100 100 110 001 100 001 110 001 011 011 110 001 110 001 011 001 100 011 100

A6

011 011 011 011 011 011 011 011 100 100 100 100 100 100 100 100 111 111 111 111 111 111 111 111
001 001 010 010 101 101 110 110 001 001 010 010 101 101 110 110 001 001 010 010 101 101 110 110
101 110 101 110 001 010 001 010 010 110 001 101 010 110 001 101 010 101 001 110 001 110 010 101

A7 This is the canonical one.

001 001 001 001 001 001 010 010 010 010 010 010 100 100 100 100 100 100 111 111 111 111 111 111
010 010 100 100 111 111 001 001 100 100 111 111 001 001 010 010 111 111 001 001 010 010 100 100
100 111 010 111 010 100 100 111 001 111 001 100 010 111 001 111 001 010 010 100 001 100 001 010

Groups=7

Boolean Orbits

A1

000

001 -- 100 -- 101

010 -- 011 -- 110 -- 111

A2

000

001 -- 110 -- 111

010 -- 011 -- 100 -- 101

A3
000
001 -- 010 -- 011
100 -- 101 -- 110 -- 111

A4
000
001 -- 011 -- 101 -- 111
010 -- 100 -- 110

A5
000
001 -- 100 -- 110 -- 011
010 -- 101 -- 111

A6
000
001 -- 101 -- 110 -- 010
100 -- 011 -- 111

A7
000
001 -- 100 -- 111 -- 010
101 -- 110 -- 011

B1

001 001 001 001 011 011 011 011 100 100 100 100 101 101 101 101 110 110 110 110 111 111 111 111
010
100 101 110 111 100 101 110 111 001 011 101 111 001 011 100 110 001 011 101 111 001 011 100 110

B2

001 001 001 001 010 010 010 010 100 100 100 100 101 101 101 101 110 110 110 110 111 111 111 111
100 101 110 111 100 101 110 111 001 010 101 110 001 010 100 111 001 010 100 111 001 010 101 110
111 110 101 100 111 110 101 100 010 001 110 101 010 001 111 100 010 001 111 100 010 001 110 101

Reduction

B3

100
001 001 001 001 010 010 010 010 011 011 011 011 101 101 101 101 110 110 110 110 111 111 111 111
010 011 110 111 001 011 101 111 001 010 101 110 010 011 110 111 001 011 101 111 001 010 101 110

B4

001 001 001 001 010 010 010 010 011 011 011 011 100 100 100 100 110 110 110 110 111 111 111 111
010 011 110 111 001 011 100 110 001 010 100 111 010 011 110 111 001 010 100 111 001 011 100 110
100 100 100 100 111 111 111 111 110 110 110 110 001 001 001 001 011 011 011 011 010 010 010 010

B5

001 001 001 001 010 010 010 010 011 011 011 011 100 100 100 100 101 101 101 101 111 111 111 111
111 111 111 111 100 100 100 100 101 101 101 101 010 010 010 010 011 011 011 011 001 001 001 001
010 011 100 101 001 011 101 111 001 010 100 111 001 011 101 111 001 010 100 111 010 011 100 101

B6 This is the canonical one.

001 001 001 001 010 010 010 010 011 011 011 011 100 100 100 100 101 101 101 101 110 110 110 110
010 011 100 101 001 011 100 110 001 010 101 110 001 010 101 110 001 011 100 110 010 011 100 101
100 101 010 011 100 110 001 011 101 110 001 010 010 001 110 101 011 001 110 100 011 010 101 100

Reduction

B7

010 010 010 010 011 011 011 011 100 100 100 100 101 101 101 101 110 110 110 110 111 111 111 111
100 101 110 111 100 101 110 111 010 011 110 111 010 011 110 111 010 011 100 101 010 011 100 101
001 001

Groups=7

Boolean Orbits.

B1

000

001 -- 100 -- 101 -- 110 -- 111 -- 011

010

B2

000

001 -- 111 -- 110 -- 100 -- 101 -- 010

011

B3
000
001 -- 010 -- 011 -- 110 -- 111 -- 101
100

B4
000
001 -- 100 -- 111 -- 110 -- 011 -- 010
101

B5
000
001 -- 010 -- 011 -- 100 -- 101 -- 111
110

B6
000
001 -- 101 -- 010 -- 011 -- 100 -- 110
111

B7
000
010 -- 100 -- 101 -- 110 -- 111 -- 011
001